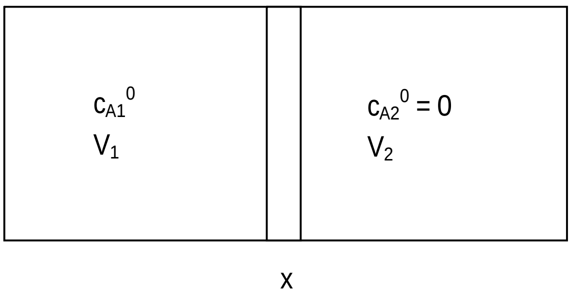
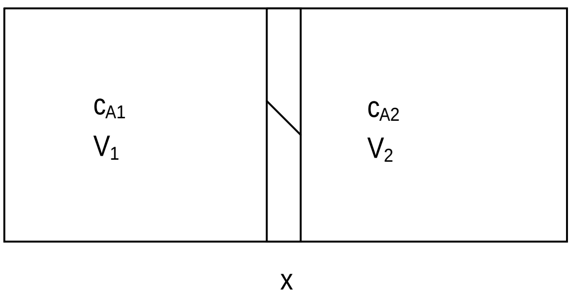
5. Cela o celkovém objemu 200 ml je rozdělena přepážkou na dva oddělené prostory o stejném objemu. V přepážce je membrána o ploše 10 cm^2 a tloušťce 0,2 mm. V levém prostoru je na počátku 100 ml roztoku látky A v rozpouštědle B o koncentraci 0,1 mol/dm^3. V pravém prostoru je na počátku čisté rozpouštědlo B. Vypočítejte, za jak dlouho projde z levého oddílu do pravé části s původně čistým rozpouštědlem 5 procent obsahu látky A. Hodnota difúzního koeficientu je $7{,}5.10^{-11}\ m^2s^{-1}$. Předpokládejte:

- ustálený stav
- koncentrační profil v membráně je úsečka začínající a končící na hodnotách koncentrací v jednotlivých prostorech cely
- oba prostory jsou ideálně promíchávané
- difúzní koeficient je konstanta
- objemy kapaliny v jednotlivých částech jsou konstantní
- tloušťka membrány se nemění
- zádrž v membráně zanedbatelná, rozpouštědlo membránou neprochází

počáteční stav (τ = 0s):



obecný čas τ



Vyjde se z 1. Fickova zákona (J tok látky jednotkovým průřezem, D difúzní koeficient, A plocha membrány, n látkové množství, x tloušťka membrány, c_i molární koncentrace, τ čas) :

$$J = \frac{dn}{Ad\tau} = \frac{dn_{A2}}{Ad\tau} = -\frac{dn_{A1}}{Ad\tau} = D\frac{dc_A}{dx} = D\frac{c_{A1} - c_{A2}}{x} \tag{0.1}$$

Z látkové bilance platí

$$
\begin{aligned}
n_{A1} &= n_{A1}^{0} - n_{A2} = c_{A1}^{0} V_1 - c_{A2} V_2 \\
c_{A1} &= c_{A1}^{0} - \frac{c_{A2} V_2}{V_1}
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

a spojením (0.1) s (0.2) dostaneme (za poměr objemů by se mohla dosadit jednička, ale zatím ponecháno obecně – na způsob integrace to nemá žádný vliv, protože je to také konstanta)

$$
J = \frac{dn}{Ad\tau} = \frac{dn_{A2}}{Ad\tau} = D\frac{c_{A1}^{0} - \frac{c_{A2}V_2}{V_1} - c_{A2}}{x} = D\frac{c_{A1}^{0} - c_{A2}\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)}{x}
\tag{0.3}
$$

Protože $c_{A2} = n_{A2}/V_2$, platí

$$
\frac{dc_{A2}}{d\tau} = \frac{1}{V_2}\frac{dn_{A2}}{d\tau}
\tag{0.4}
$$

Spojením (0.3) a (0.4) obdržíme diferenciální rovnici

$$
\frac{V_2}{A}\frac{dc_{A2}}{d\tau} = D\frac{c_{A1}^{0} - c_{A2}\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)}{x}
\tag{0.5}
$$

jejíž řešením po separaci proměnných v mezích od nuly do aktuální hodnoty c_{A2} a od nuly do aktuálního času τ dostaneme

$$
\frac{V_2 x}{\left(1 + V_2/V_1\right)DA}\ln\frac{1}{1 - \left(1 + V_2/V_1\right)\frac{c_{A2}}{c_{A1}^{0}}} = \tau
\tag{0.6}
$$

Odtud můžeme vyjádřit časový průběh koncentrace c_{A2}

$$
c_{A2} = \frac{c_{A1}^{0}}{\left(1 + V_2/V_1\right)}\left(1 - \exp\left(-\frac{\left(1 + V_2/V_1\right)DA}{V_2 x}\tau\right)\right)
\tag{0.7}
$$

Protože platí

$$
c_{A1} = \frac{n_{A1}^{0}}{V_1} - \frac{n_{A2}}{V_1} = c_{A1}^{0} - \frac{c_{A2}V_2}{V_1}
\tag{0.8}
$$

lze spojením (0.7) a (0.8) vyjádřit i časový průběh koncentrace c_{A1}:

$$
c_{A1} = c_{A1}^{0}\left(\frac{1}{\left(1 + V_2/V_1\right)} + \frac{1}{\left(1 + V_1/V_2\right)}\exp\left(-\frac{\left(1 + V_2/V_1\right)DA}{V_2 x}\tau\right)\right)
\tag{0.9}
$$

Pokud jsou objemy V_1 a V_2 stejné, rovnice (0.7) a (0.9) se zjednoduší na

$$
\begin{aligned}
c_{A2} &= \frac{c_{A1}^0}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{2DA}{V_2 x}\tau\right)\right) \\
c_{A1} &= \frac{c_{A1}^0}{2}\left(1+\exp\left(-\frac{2DA}{V_2 x}\tau\right)\right)
\end{aligned}
\tag{0.10}
$$

Řešení příkladu 5: dosadí se do vztahu (0.10) pro c_{A1}

$$
\begin{aligned}
&0,95c_{A1}^0 = \frac{c_{A1}^0}{2}\left(1+\exp\left(-\frac{2.7,5.10^{-11}.10.10^{-4}}{100.10^{-6}.0,2.10^{-3}}\tau\right)\right) \\
&\tau = 14050\ \mathrm{s}
\end{aligned}
\tag{0.11}
$$